'*Mirabilem sane*' доказательство-1637

'Последняя теорема' Pierre de Fermat - по тексту *Donald E.Knuth* :

« если n - целое число, n > 2 , то уравнение $X^n + Y^n = Z^n$

неразрешимо в целых положительных числах X, Y, Z » .

Не теряя общности положим, что X < Z > Y взаимно просты, а число X - <u>нечётно</u> и представлено своим разложением на две группы p > q ≥ 1 взаимно простых произведений множителей X:

$$Z^n - Y^n = X^n = p^n q^n.$$

Заменим переменные параметры p, q на w, v :

$$w + v = p^n \quad \text{и} \quad w - v = q^n, -$$

так что $w = (p^n + q^n)/2$, $v = (p^n - q^n)/2$ и

$$Z^n - Y^n = X^n = w^2 - v^2 = p^n q^n. \qquad 1$$

При n = 2, т.е. для (X Y Z) - *простой тройки Пифагора* (ПТП) :

$$Z^2 - Y^2 = w^2 - v^2 = X^2, -$$

все взаимно простые нечётные p > q дадут для любого нечётного X все существующие ПТП для вариантов представления $X = p_i q_i$:

$w = (p_i^2 + q_i^2)/2$, $v = (p_i^2 - q_i^2)/2$, (<u>чётное</u> число) с $X = p_i q_i$, -

а следовательно и набор вариантов для $Z^2 - Y^2$:

$$Z = (p_j^2 + q_j^2)/2, \quad Y = (p_j^2 - q_j^2)/2, \quad X = p_j q_j .$$

При любом показателе n и для любого нечётного X в [1] при существовании целых положительных корней уравнения все варианты разложения фиксированного $X = p_i q_i$ дают лишь решения, обладающие одинаковым набором общих множителей как у числа X, так и у разности $Z^n - Y^n$ для любого индекса i.

Поэтому для выяснения вопроса о наличии решений достаточно рассмотреть возможность существования одного из них – «базового» с $p = X$ и $q = 1$, - единственного, когда X – простое число.

Тогда при чётных $n = 2k$:

$$(Z^k)^2 - (Y^k)^2 = (X^k)^2, -$$

с целыми положительными корнями ПТП для любых X и k :

$$Z^k = (X^{2k} + 1)/2, \qquad Y^k = (X^{2k} - 1)/2, -$$

следует невозможное для целых чисел при $k > 1$, $n > 2$:

$$Z^k - Y^k = 1, -$$

т.е. отсутствие решений в целых числах Z и Y - как для этой базовой ПТП, так и для связанных с нею общностью X.

Справедливость же рассматриваемой теоремы для чётных $n = 2k$:

$$Z^{2k} - Y^{2k} = X^{2k}, -$$

доказывает её и для нечётных степеней n, поскольку отсутствие искомых решений для уравнения

$$Z^{2(2k-1)} - Y^{2(2k-1)} = X^{2(2k-1)}$$

означает отсутствие каких-либо требуемых и для уравнения

$$Z^{(2k-1)} - Y^{(2k-1)} = X^{(2k-1)}.$$

Примечание .

Неразрешимость в целых положительных числах уравнения :

$$(Z^k)^2 - (Y^k)^2 = (X^k)^2, -$$

при $k > 1$ вытекает из единственного известного не тривиального свойства пифагоровых троек - запрета двум различным ПТП :

$$(X_1\ Y_1\ Z_1) \quad \text{и} \quad (X_2\ Y_2\ Z_2)\ , \ -$$

иметь два общих элемента - даже для пары $(X_1\ Y\ Z_1)$, $(Z_1\ Y\ Z_2)$:

$$Z_1^2 - Y^2 = X_1^2 \quad \text{и} \quad Z_2^2 - Y^2 = Z_1^2\ , -$$

что следует из неразрешимости в целых возникающего уравнения :

$$2Y^2 = X_1^2 + Z_2^2,$$

где $X_1^2 + Z_2^2 = (2i-1)^2 + (2J-1)^2 = 4i(i-1) + 4j(j-1) + 2 \equiv 2 \pmod 8$,

тогда как для чётного Y имеем $2Y^2 \equiv 0 \pmod 8$, -

чем немедленно утверждается, в частности, справедливость теоремы для биквадратов, поскольку требуется :

$$Z_1^4 - Y^4 = (X_1 Z_2)^2, -$$

о невозможности чего Пьер Ферма сообщал - и «на полях», и в своей переписке, - демонстрируя изобретённый им метод спуска.

Тот факт, что он не упоминал при этом про снабжённый лестным авторским эпитетом (‘mirabilem sane’) лёгкий путь, вполне объясним тем, что этот путь не добавлял ничего существенного к методике математических доказательств.

* * *

Аннотация : рассмотрено практическое решение уравнения теоремы путём представления нечётного слагаемого **X** двумя сомножителями **X : p>q** как параметрами. Напрашивающаяся замена этих переменных параметров : $w + v = p^n$, $w - v = q^n$, - приводит к старинному алгоритму вычисления троек Пифагора, а из их почти очевидных свойств следует элементарное реконструируемое доказательство Ферма, присвоившего ему (автор !) лестный эпитет за редкую простоту получения результата, а далее не упоминавшего это доказательство как не внёсшее ничего нового в арсенал математики.

* * *